

## Дәріс 3

### Сигналдар теориясы

---

#### Анықтама:

Векторлар жиыны сызықтық тәуелсіз деп аталады, егер олардың ешқайсысын басқалар арқылы сызықтық комбинация түрінде өрнектеуге болмаса. Яғни, векторлар  $v_1, v_2, \dots, v_n$  үшін:

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

теңдеуі тек нөлдік шешімге ие болса, яғни:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

онда бұл векторлар сызықтық тәуелсіз деп аталады. Керісінше, егер бұл теңдеудің бейнөлдік шешімі бар болса, онда бұл векторлар **сызықтық тәуелді** деп аталады.

#### Мысалдар:

- Мысал 1 (сызықтық тәуелсіз):

Векторлар:

$$v_1 = [1, 0], v_2 = [0, 1]$$

Бұл екі вектор сызықтық тәуелсіз, өйткені бірі екіншісінің сызықтық комбинациясы емес.

- Мысал 2 (сызықтық тәуелді):

Векторлар:

$$v_1 = [2, 4], v_2 = [1, 2]$$

Байқаймыз:  $v_1 = 2 \cdot v_2$ , сондықтан бұл векторлар сызықтық тәуелді.

#### Практикалық тексеру (матрица арқылы):

Векторларды матрица бағандары ретінде жазып, оның рангісін тексереміз. Егер бағандар саны рангіге тең болса — сызықтық тәуелсіз.

Мысалы:

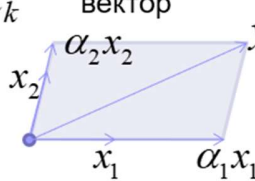
$$A = [[1, 2], [3, 6]] \rightarrow \text{рангі} = 1 \rightarrow \text{тәуелді}$$

#### Қорытынды:

Сызықтық тәуелсіздік — математикада және телекоммуникация, сигнал өңдеу, деректерді кодтау сияқты көптеген инженерлік салаларда маңызды ұғым. Ол векторлар немесе сигналдардың бірегейлігін, толықтығын сипаттайды.

## Сигнал кеңістігінің құрылымдық қасиеттері

Векторларды қосу және векторды скалярға көбейту анықталғандықтан, ерікті векторлардың ақырлы жиынының сызықтық комбинациясы да анықталады:

$$\begin{array}{l} \text{векторлар } \{x_k, k = \overline{1, N}\} \\ \text{скалярлар } \{\alpha_k, k = \overline{1, N}\} \end{array} \quad \longrightarrow \quad y = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k$$


Векторлар жиыны  $\{v_k, k = \overline{1, N}\}$  сызықтық тәуелсіз, егер

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k v_k = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \alpha_k = 0 \quad \forall k = \overline{1, N}$$

Салмақ коэффициенттерінің барлық мүмкін жиындары бар берілген векторлар жиынының барлық сызықтық комбинацияларының жиыны оның (жиынының) сызықтық қабығын құрайды:

$$\begin{array}{l} \text{векторлар жиыны } \{x_k, k = \overline{1, N}\} \\ \text{скалярлардың барлық мүмкін жиындары } \{\{\alpha_k \in F\}, k = \overline{1, N}\} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left\{ y = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k \right\}$$

векторлар жиыны

Сызықтық тәуелсіз векторлар жиынының сызықтық қабығы

$$\{y_k, k = \overline{1, N}\} \quad N \text{ өлшемді сызықтық кеңістігі болып табылады}$$

$$\{y_k, k = \overline{1, N}\} \quad \text{бұл кеңістіктің базисі болып табылады}$$

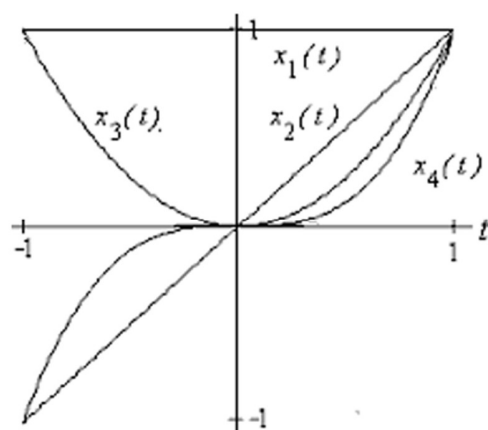
**Кеңістіктік базис** деп кез келген кеңістік векторын осы жиынға жататын векторлардың сызықтық комбинациясы арқылы көрсетуге болатындай сызықты тәуелсіз векторлар жиынын айтады.

## Мысалы

Функциялар жиынын негізге алайық

$$S_4 = \{x_1(t) = 1, x_2(t) = t, x_3(t) = t^2, x_4(t) = t^3\}$$

$t \in [-1, 1]$  аралықта анықталады (сызықтық тәуелсіздік анық)



Бұл негіздің сызықтық аралығы форманың барлық функцияларынан тұратын төрт өлшемді кеңістік болып табылады

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3$$

кезінде  $t \in [-1, 1]$

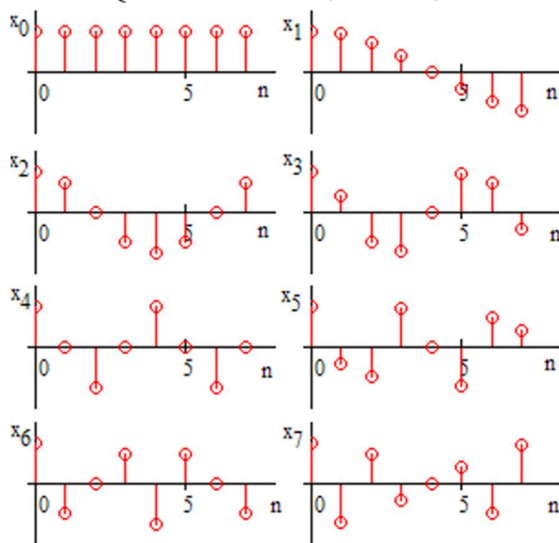
және әртүрлі коэффициенттер  $\alpha_i$

## Мысалы

Бүтін айнымалы функциялар жиыны

$$Q_8 = \left\{ x_k[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{16}kn\right), k = \overline{0, 7} \right\} \text{ кезінде } n = \overline{0, 7}$$

сызықтық тәуелсіз



Бұл негіздің сызықтық қабығы форманың барлық функцияларынан тұратын сегіз өлшемді кеңістік болып табылады

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{16}kn\right), n = \overline{0, 7}$$

$\alpha_i$  коэффициенттердің барлық түрлерімен

## Сигнал кеңістігінің толық базистері

Шексіз өлшемді кеңістіктің базисі толық деп аталады, егер осы кеңістіктен кез келген вектор (сигнал) базистік векторлардың сызықтық комбинациясы арқылы ұсынылуы мүмкін болса.

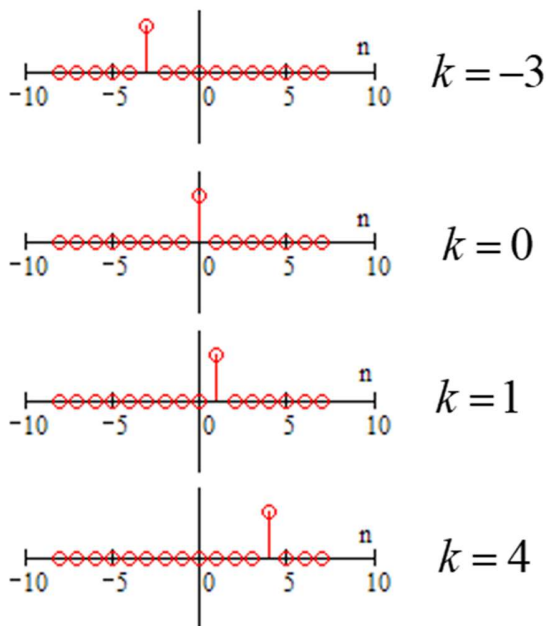
Басқаша айтқанда, егер оның сызықтық аралығы бүкіл кеңістікке сәйкес келсе, базис аяқталды

Берілген барлық дискретті сигналдардың кеңістігі

$$n = \overline{-\infty, \infty}$$

Бұл кеңістіктің толық базистерінің бірі

$$\{\delta[n-k], k = \overline{-\infty, \infty}\}$$



Кез келген дискретті  
сигнал ретінде ұсынылуы  
мүмкін

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta[n-k] \end{aligned}$$

Барлық екілік векторлардың жиыны  $B_8 = \{b_k, k = \overline{1, 8}\}$

мұнда  $b_k \in \{0, 1\}$  мысалы  $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$

элементтердің соңғы жиынын ғана қамтиды (атап айтқанда 256)

оны сызықтық кеңістік ретінде қарастыруға болады, егер векторларды қосу олардың құрамдас бөліктерін модуль 2 қосу арқылы анықталса, ал Галуа өрісі деп аталатын өріс скалярлар өрісі ретінде алынса.

Мұндай кеңістіктер өте маңызды рөл атқарады, мысалы, байланыс теориясының маңызды бөлігі болып табылатын кодтау теориясында. Бұл кеңістіктің негізі ретінде кез келген 8 сызықты тәуелсіз нөлдік емес векторлар алынуы мүмкін

## Метрика

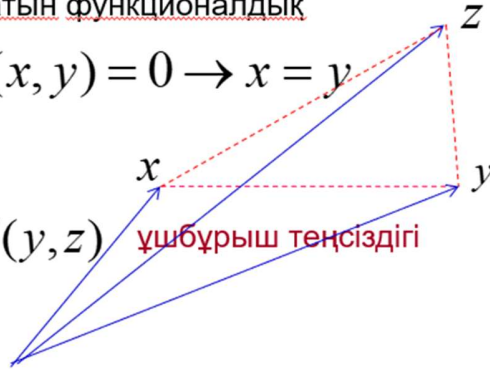
$d(x, y)$  метрикалық - функциялар жұбын қашықтық деп аталатын санмен байланыстыратын функционалдық

Қасиеттері

$$1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad d(x, y) = 0 \rightarrow x = y$$

$$2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{үшбұрыш теңсіздігі}$$



$$d(x, y) = \left( \int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad d(x, y) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2 \right)^{1/2}$$

## Норма

норма - функцияны санмен сәйкестендіретін функция (вектордың ұзындығына сәйкес)

Қасиеттері

$$1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \rightarrow x = \vec{0}$$

$$2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

үшбұрыш теңсіздігі

$$3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E_x}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_0^T |x(t)|^p dt}$$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p}$$

## Норма және метрика

Норма аксиомалары мен метрика арасындағы айқын ұқсастықты ескере отырып, метрика көбінесе (бірақ әрқашан емес!) векторлар айырмасының нормасы ретінде анықталады.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

$l_2$  кеңістігінде

$$\|x\| \longleftrightarrow d(x, y) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2 \right)^{1/2}$$

$L_2$  кеңістігінде

$$\|x\| \longleftrightarrow d(x, y) = \left( \int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

## Скалярлық көбейтінді

Векторлардың скаляр көбейтіндісі функционалды болып табылады  
( $x, y$ )

- 1)  $(x, y) = (y, x)^*$
- 2)  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
- 3)  $(x, x) \geq 0; \quad (x, x) = 0 \rightarrow x = \vec{0}$

1) және 2) ескеріп жаза аламыз

$$\begin{aligned} (x, \alpha y + \beta z) &= (\alpha y + \beta z, x)^* = \alpha^* (y, x)^* + \beta^* (z, x)^* = \\ &= \alpha^* (x, y) + \beta^* (x, z) \end{aligned}$$

Скаляр көбейтіндісі арқылы норманы орнатуға болады

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Норма арқылы метрику орнатуға болады

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Ішкі туындысы және ол арқылы тудыратын нормасы мен метрикасы бар кеңістік, егер ол толық болса\*, **Гильберт кеңістігі** деп аталады.

Кеңістік толық, егер жинақталатын тізбектердің шектерін қамтитын болса.

## Гильберт кеңістігі

Скалярлық көбейтіндімен шектелген  $(0, T)$  аралықта берілген шектеулі энергияның аналогтық сигналдарының жиынтығы

$$(x, y) = \int_0^T x(t) y^*(t) dt$$

нормасы

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

және метрикасы

$$d(x, y) = \sqrt{\int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt}$$



David Hilbert  
(1862-1943)

Гильберт кеңістігі болып табылады  $L_2(T)$

Шексіз интервал кезінде  $L_2(-\infty, +\infty)$

Шексіз ұзындықтағы дискретті сигналдар (тізбектер) жиыны Гильберт кеңістігіне айналады, егер скаляр көбейтіндісі өрнекпен анықталса.

$$(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n]$$

норма және метрикасы

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2}$$

квадратты жиынтық  $l_2$  тізбектердің Гильберт кеңістігі болып табылады

Скалярлық көбейтіндінің анықтамасы Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігін білдіреді

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

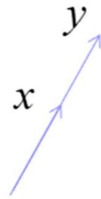
деп қайта жазуға болады

$$\frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

сондықтан нақты сигналдар жұбы үшін олардың арасындағы бұрышты өрнек арқылы анықтауға болады

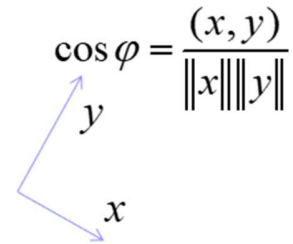
Екі шекті жағдай:

$$(x, y) = \|x\| \|y\|$$



бірдей формадағы сигналдар

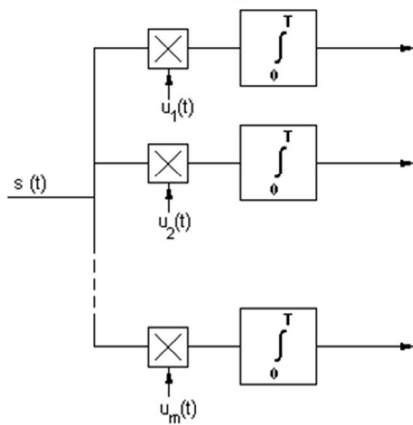
$$(x, y) = 0$$



ортogonalды сигналдар

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

Ортogonalды сигналдары бар байланыс жүйесінің қабылдағыш құрылымы



$$s(t) = u_k(t) + \xi(t)$$

Ортогональдылық жоғары шу иммунитетін қамтамасыз етеді

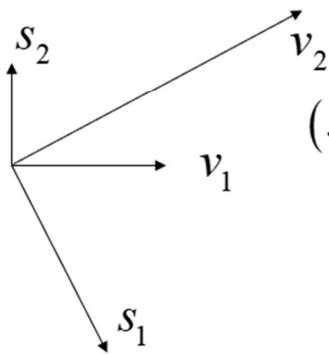
## Скалярлы көбейтінді

берілген негізде ерікті вектордың кеңею коэффициенттерін табуға мүмкіндік береді

$$\{v_k, k = \overline{1, N}\} \quad \text{берілген базис} \quad x = \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k$$

$$\{s_k, k = \overline{1, N}\} \quad \text{біріккен өзара базис}$$

$$(v_k, s_m) = \delta_{km} \quad \text{мұнда} \quad \delta_{km} = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}$$



$$\begin{aligned} (x, s_m) &= \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k, s_m \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k (v_k, s_m) = \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta_{km} = \alpha_m \end{aligned}$$

## Детерминистің сигналдың энергетикалық сипаттамалары

Сигналдың негізгі энергетикалық сипаттамалары  $t_1 \leq t \leq t_2$  аралығында -  $P(t)$  лездік қуат,  $E$  энергия және  $P_{cp}$  орташа қуат.

$$\begin{aligned} P(t) &= S^2(t) \\ E &= \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt, \\ P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt \end{aligned}$$

Көптеген мәселелерді шешу үшін күрделі сигналдарды уақыт функциясымен сипатталған қарапайым, жақсы зерттелген қарапайым сигналдардың жиынтығы ретінде ұсыну қажет:

$$S(t) = \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(t). \quad \int_{t_1}^{t_2} S(t) \varphi(t) dt = 0,$$

### Фурье қатарының өрнегі

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega_1 t) + b_k \sin(k\Omega_1 t)],$$

$$k = 1, 2, \dots, \Omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_1 \quad F_1 = \frac{1}{T}; \quad k\Omega_1 \quad (k > 1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\Omega_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\Omega_1 t) dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \quad b_0 = 0$$

Немесе жалпылама түрде

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\Omega_1 t + \Psi_k)],$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} - \text{амплитуда},$$

$$\Psi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \begin{array}{|c|} \hline \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \hline \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \hline \end{array} \end{array} - \text{бастапқы фаза}$$

## Бақылау сұрақтары

1. Векторлардың сызықтық тәуелсіздігі туралы жазыңыз
2. Кеңістіктік базис ұғымын түсіндіріңіз
3. Метрика туралы жазыңыз
4. Норма туралы жазыңыз
5. Гильберт кеңістігі туралы жазыңыз
6. Ортогональды сигналдары бар байланыс жүйесінің қабылдағыш құрылымын сызыңыз. Ортогональді сигналдар туралы түсіндіріңіз.
7. Фурье қатарын жазыңыз
8. Периодты емес сигналдар үшін Фурье түрлендіруін жазыңыз.